ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΡΙΤΗ 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2025

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ οι παρατηρήσεις μίας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους ν, που έχουν μέση τιμή $\bar{x}$. Αν αφαιρέσουμε τη μέση τιμή $\bar{x}$ από κάθε παρατήρηση, να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των διαφορών αυτών είναι ίσος με 0.

Μονάδες 7

Α2. Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής;

Μονάδες 4

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η διακύμανση των παρατηρήσεων ενός δείγματος εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες μέτρησης με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις του δείγματος.

β. Το εύρος είναι ένα μέτρο διασποράς.

γ. Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς το x, όταν $x = x_0$.

δ. Αν f παραγωγίσιμη συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ, τότε ισχύει $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$, $c \in \mathbb{R}$.

ε. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

Μονάδες 10

Α4. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ελλιπείς ισότητες και να τις συμπληρώσετε σωστά:

α. $(c)' = \cdots$

β. $(x^2)' = \cdots$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Β

Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει το πλήθος των ωρών που εργάζονται υπερωριακά 50 υπάλληλοι σε μία επιχείρηση κατά τη διάρκεια ενός μήνα.

Πλήθος ωρών x_i	Συχνότητα ν_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Συχνότητα N_i
0	…	…	…
1	15	…	…
2	11	…	…
3	8	…	…
4	6	…	50
Σύνολο	50	100	

Β1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να συμπληρώσετε τα κενά.

Μονάδες 10

Β2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ του δείγματος.

Μονάδες 5

Β3. Να υπολογίσετε τη διάμεσο δ του δείγματος.

Μονάδες 4

Β4. α) Να υπολογίσετε το ποσοστό των υπαλλήλων που εργάζονται υπερωριακά το πολύ 3 ώρες. (μον. 3)

β) Αν αυξηθούν οι υπερωρίες κατά 4 ώρες σε κάθε υπάλληλο, να βρείτε τη νέα μέση τιμή. (μον. 3)

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2x^3 + 6x^2 + \alpha, \quad x \in \mathbb{R}$ και α σταθερός πραγματικός αριθμός.

Γ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε το είδος και την τιμή των ακροτάτων της f ως συνάρτηση του α (μον. 4) και στη συνέχεια να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού α, αν το ημιάθροισμα των τιμών των ακροτάτων της f είναι -8. (μον. 4)

Μονάδες 8

Γ3. Για $\alpha = -12$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(1, f(1))$.

Μονάδες 6

Γ4. Για $\alpha = -12$, να δείξετε ότι $x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0$ για κάθε $x \in [2, +\infty)$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \lambda x^2 + 7x + \frac{2}{3}$ με $x \in \mathbb{R}$ και λ σταθερός πραγματικός αριθμός.

Δ1. Αν ισχύει $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 0$, να βρεθεί ο αριθμός λ.

Μονάδες 4

Δ2. Για $\lambda = -4$, να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 6

Δ3. Για $\lambda = -4$, να προσδιοριστεί το πρόσημο της παράστασης

$$A = \frac{f(2025) - f(2020)}{f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{5}{2}\right)}$$

Μονάδες 7

Δ4. Για $\lambda = -4$, να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x \to 2} \frac{f'(x) - f''(x) + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}}$$

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα, **μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης**.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ